Álgebra II

Examen X

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

David Sánchez Muñoz

Granada, 2026

Curso Académico 25/26.

Grado DGIIM.

Grupo Único.

Profesor Aurora Inés del Río Cabeza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 17/06/2026.

Ejercicio 1 (1,75 puntos)**.** Se considera el grupo diédrico

$$D_5 = \langle r, s \mid r^5 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$$

y el grafo G cuyos vértices son los elementos de D_5 y en el que, para cualquier $a \in D_5$, hay una arista entre a y ra y también una arista entre a y sa.

a) (0,25 puntos) Calcula la sucesión de grados de G y calcula su matriz de adyacencia.

b) (0,75 puntos) Razona si G es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.

c) (0,75 puntos) Considera un nuevo grafo G' obtenido añadiendo a G un nuevo vértice adyacente a todos los de G. Razona si G' es un grafo de Euler o si tiene un camino de Euler. ¿Es Hamiltoniano? ¿Y plano?

Ejercicio 2 (0,75 puntos)**.** Demuestra que un grupo finito G tiene un único p-subgrupo de Sylow para cada primo p si, y solo si, G es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Ejercicio 3 (1 punto)**.**

a) (0,5 puntos) Demuestra que no existen grupos simples de orden 351.

b) (0,5 puntos) Si G es un grupo finito con un subgrupo normal N de índice 351, demuestra que, si N es resoluble, entonces G también es resoluble.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)**.** Sea G un grupo de orden 20.

a) (0,5 puntos) Razona que G es el producto semidirecto un 2 subgrupo de Sylow de G y un 5 subgrupo de Sylow de G.

b) (1 punto) Razona que si G tiene un elemento de orden 4 entonces hay al menos tres productos semidirectos (no isomorfos) $P_5 \rtimes P_2$ uno de ellos abeliano y dos no abelianos, da una presentación de estos últimos.

c) (1 punto) Concluye que hay al menos 5 grupos de orden 20, dos abelianos y tres no abelianos. Da las descomposiciones cíclicas de los abelianos y presentaciones de los no abelianos.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Sea $A = \mathbb{Z}^4/K$ donde K es el subgrupo con generadores

$$\{(5, 90, 130, 0), (-25, 120, 25, -30), (5, 0, 10, 0)\}.$$

a) (1,25 puntos) Calcula, de forma razonada, el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. Describe cuales son las componentes p-primarias no nulas de A y razona si A tiene elementos de orden ∞, de orden 50 o de orden 6 dando, en su caso, un ejemplo de cada uno de ellos.

b) (0,75 puntos) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea igual al orden de $T(A)$, el grupo de torsión de A. Determina la longitud y los factores de composición de todos ellos.

Ejercicio 6 (2 puntos)**.** Define el concepto de grupo simple. Demuestra el Teorema de Abel.